Παρατηρήσεις – Σχόλια – Επεκτάσεις

Μάθημα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου
Κεφάλαιο 2. Η ευθεία στο επίπεδο
Άσκηση Γενικές 3, σελ. 77 (σχολικό βιβλίο)

Άσκηση
Αν οι τρεις ευθείες $\alpha_κx + \beta_κy = 1$, με κ = 1, 2, 3, διέρχονται από το ίδιο σημείο, να αποδείξετε ότι τα σημεία $(\alpha_κ,\beta_κ)$, κ = 1, 2, 3, είναι συγγραμικά.

Παρατηρήσεις
Παραθέτω μία λύση αρκετά διαφορετική και πολύ πιο γρήγορη από αυτήν στο βιβλίο λύσεων. Πιστεύω πως και οι δύο λύσεις βρίσκονται εκτός κάποιας συνηθισμένης μεθοδολογίας και ίσως αναπόφευκτα, καθώς και η άσκηση είναι ιδιαίτερη.
Η λύση που παραθέτω είναι παρόμοια με τη λύση της άσκησης Β'ομ.3 της σελ. 88 (πολική ευθεία κύκλου).

Λύση
Αν $M(x_0,y_0)$ το σημείο από το οποίο διέρχονται οι τρεις ευθείες*, τότε έχουμε

$$M(x_0,y_0)\in\varepsilon_1:\alpha_1x+\beta_1y=1\Leftrightarrow\alpha_1x_0+\beta_1y_0=1\Leftrightarrow(\alpha_1,\beta_1)\in\varepsilon:xx_0+yy_0=1$$

$$M(x_0,y_0)\in\varepsilon_2:\alpha_2x+\beta_2y=1\Leftrightarrow\alpha_2x_0+\beta_2y_0=1\Leftrightarrow(\alpha_2,\beta_2)\in\varepsilon:xx_0+yy_0=1$$

$$M(x_0,y_0)\in\varepsilon_3:\alpha_3x+\beta_3y=1\Leftrightarrow\alpha_3x_0+\beta_3y_0=1\Leftrightarrow(\alpha_3,\beta_3)\in\varepsilon:xx_0+yy_0=1$$

Έτσι, τα σημεία (α_1,β_1), (α_2,β_2), (α_3,β_3) βρίσκονται στην ίδια ευθεία, την ε: $xx_0 + yy_0 = 1$, άρα είναι συγγραμικά.

(*) όπως και στη λύση του βιβλίου λύσεων, είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι το σημείο $M(x_0,y_0)$ δεν μπορεί να είναι το (0,0). Εύκολα προκύπτει με απαγωγή σε άτοπο:
Αν το Μ είναι το (0,0), τότε $M(0,0)\in\varepsilon_1:0x+0y=1\Leftrightarrow 0=1$, άτοπο.
Αυτό εξασφαλίζει ότι η εξίσωση της ε: $xx_0 + yy_0 = 1$ είναι πάντα ευθεία, καθώς τα x_0, y_0 δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.

Πετρίδης Παντελής
Μαθηματικός
ppetridis@sch.gr
users.sch.gr/ppetridis