Παρατηρήσεις – Σχόλια – Επεκτάσεις

Μάθημα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου
Κεφάλαιο 3. Κωνικές τομές
Παράγραφος 3.3. Η Έλλειψη
Άσκηση Β' Ομάδας 1, σελ. 112 (σχολικό βιβλίο)

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2},\frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για όλες τις τιμές του $t\in\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

Το βιβλίο λύσεων προτείνει την αναμενόμενη λύση: επιβεβαιώνει ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Η παρακάτω λύση, αν και μη αναμενόμενη, χρησιμοποιεί την τριγωνομετρία και εκμεταλλεύεται μία σύμπτωση που, πιθανότατα δεν είναι τυχαία, αλλά φανερώνει την ιδέα από την οποία δημιουργήθηκε η άσκηση.

Λύση

Υπενθύμιση: Ισχύουν οι τύποι $\eta\mu 2\theta=\frac{2\varepsilon\phi\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\theta=\frac{1-\varepsilon\phi^2\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta}$ (Αλγ.Β' §1.4, εφ.2, σελ.35)

Το σύνολο τιμών της εφθ, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι όλο το $\mathbb{R}$, άρα μπορούμε να θέσουμε $t=\varepsilon\phi\theta$.

Έτσι το σημείο Μ γίνεται

$$M\left(\alpha\frac{1-t^2}{1+t^2},\beta\frac{2t}{1+t^2}\right)\equiv M\left(\alpha\frac{1-\varepsilon\phi^2\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta},\beta\frac{2\varepsilon\phi\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta}\right)\equiv M(\alpha\sigma\upsilon\nu 2\theta,\beta\eta\mu 2\theta)\equiv M(\alpha\sigma\upsilon\nu\phi,\beta\eta\mu\phi)$$

όπου $\phi = 2\theta$.

Έτσι, το σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη, αφού οι συντεταγμένες του συμφωνούν με τις παραμετρικές εξισώσεις της.

Επεκτάσεις

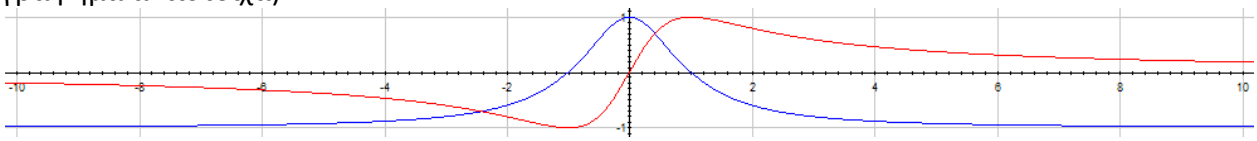
Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης ζητούν η γωνία φ να βρίσκεται στο διάστημα $[0,2\pi)$. Ωστόσο, η απαίτηση αυτή υπάρχει για την εξασφάλιση της μοναδικότητας του φ στην ισοδυναμία $M(x,y)\in\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\exists\phi\in[0,2\pi):x=\alpha\sigma\upsilon\nu\phi,y=\beta\eta\mu\phi$. Κατά τ' άλλα δεν είναι απαραίτητη για να συμπεράνουμε ότι το Μ βρίσκεται στην έλλειψη. Επιπλέον, η επιλογή του διαστήματος $[0,2\pi)$ είναι αυθαίρετη και θα μπορούσαμε να πούμε ότι γενικότερα, λόγω της περιοδικότητας των συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου, ένα οποιοδήποτε διάστημα μήκους μίας περιόδου $T=2\pi$, κλειστό από τη μία μεριά και ανοιχτό από την άλλη, θα είναι πάντα ικανό ώστε να καλύψει όλα τα σημεία της έλλειψης.

Άρα, σε πρώτη φάση η άσκηση είναι σωστή και πλήρης, διότι το σημείο Μ βρίσκεται στην έλλειψη. Όμως, το αντίστροφο ισχύει; Τα σημεία που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του t καλύπτουν όλη την έλλειψη; Το φ παίρνει όλες τις τιμές σε ένα τέτοιο διάστημα; Εφόσον $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $\phi=2\theta$ θα ισχύει $\phi\in(-\pi,\pi)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω από το διάστημα αυτό λείπει ο αριθμός –π (ή ο αριθμός π), ώστε να είναι κλειστό από τη μία μεριά. Αν ήταν $\phi=-\pi$ (είτε $\phi=\pi$), τότε το σημείο Μ θα ήταν το $M(-\alpha,0)$. Πράγματι, κάτι τέτοιο δεν είναι

δυνατόν να γίνει, διότι τότε θα ήταν $\theta=-\frac{\pi}{2}$ (ή $\theta=\frac{\pi}{2}$) και δε θα ορίζονταν η εφθ. Αλλά και πριν την αντικατάσταση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σημείο Μ δε θα μπορούσε να είναι το $M(-\alpha,0)$ διότι οι παραστάσεις $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $\frac{2t}{1+t^2}$ δεν μπορούν να γίνουν –1 και 0 αντίστοιχα για οποιαδήποτε τιμή του $t\in\mathbb{R}$.
Άρα, το σημείο Μ δε διαγράφει όλη την έλλειψη για τις διάφορες τιμές του $t\in\mathbb{R}$, αλλά όλη την έλλειψη εκτός του σημείου $A'(-\alpha,0)$.

Σημείωση:
Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με τη γωνία θ να βρίσκεται στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Τότε η γωνία φ θα βρισκόταν στο διάστημα $[0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, όπου φανερά είναι το διάστημα $[0,2\pi)$ από το οποίο λείπει το π και θα αποφεύγαμε τις παραπάνω γενικεύσεις. Ξεκινήσαμε με το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ που είναι χαρακτηριστικό για την συνάρτηση της εφαπτομένης.

Παρακάτω αποδίδονται γραφικά οι συναρτήσεις $x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $y(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ (μπλε και κόκκινο γράφημα αντίστοιχα).



Μερικές από τις παρατηρήσεις που προκύπτουν από τα γραφήματα αυτά είναι:

- Μοιάζουν με τα γραφήματα του ημιτόνου και του συνημιτόνου στο διάστημα μίας περιόδου και πιο συγκεκριμένα στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, «τεντωμένα» στο άπειρο. Αυτό ερμηνεύεται από την αντικατάσταση $t=\varepsilon\phi\theta$ που ενώ το t διατρέχει το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, το θ διατρέχει το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και τελικά το φ διατρέχει το $(-\pi,\pi)$. Θυμηθείτε ότι σύμφωνα με τη λύση πήραμε
  $x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\varepsilon\phi^2\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta}=\sigma\upsilon\nu2\theta=\sigma\upsilon\nu\phi$ και $y(t)=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\varepsilon\phi\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta}=\eta\mu2\theta=\eta\mu\phi$.
- Όταν το t τείνει σε άπειρο (σε οποιοδήποτε), τότε το x(t) τείνει να γίνει –1 ενώ το y(t) τείνει να γίνει 0. Αυτό συμβαδίζει με την αδυναμία των ποσοτήτων να πάρουν αυτές τις τιμές και με την εξαίρεση του σημείου $A'(-\alpha,0)$.

Πετρίδης Παντελής
Μαθηματικός
ppetridis@sch.gr
users.sch.gr/ppetridis